Une propriété d' indépendance pour des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart

Angelo Efoévi Koudou

Une propriété d'indépendence pour des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart

A. E. Koudou

Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239,

F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex,

Efoevi.Koudou@iecn.u-nancy.fr

February 17, 2012

Abstract

For a positive integer r, let I denote the $r \times r$ unit matrix. Let X and Y be two independent $r \times r$ real symmetric and positive definite random matrices. Assume that X follows a Kummer distribution while Y follows a non-degenerate Wishart distribution, with suitable parameters. This note points out the following observation: the random matrices $U := [I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}[I + X^{-1}]^{-1}[I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}$ and $V := X + Y$ are independent and U follows a matrix beta distribution while V follows a Kummer distribution. This generalizes to the matrix case an independence property established in Koudou and Vallois (2010) for $r = 1$.

Résumé : Soit I la matice unité $r \times r$ à coefficients réels. soient X et Y des matrices aléatoires $r \times r$ réelles symétriques définies positives, indépendantes. Sous l'hypothèse que X suit une loi de Kummer et que Y suit une loi de Wishart avec des paramètres adéquats, nous prouvons l'observation suivante : les matrices $U := [I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}[I+X^{-1}]^{-1}[I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}$ et $V := X+Y$ sont indépendantes, U suit une loi beta matricielle et V suit une loi de Kummer. Ceci constitue la version matricielle d'une propriété d'indépendance établie par Koudou et Vallois (2012) pour $r = 1$.

Keywords: Wishart distribution; Matsumoto-Yor property; Matrix Kummer distribution; Matrix Beta distribution.

1 Introduction

Soient X et Y des variables aléatoires positives et indépendantes. Soit $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction strictement décroissante et bijective. Considérons $U := f(X + Y)$ et $V := f(X) - f(X + Y)$. Dans le cas $f(x) = 1/x$, si X suit une loi gaussienne inverse generalisée (GIG) et si Y suit une loi gamma avec une condition sur les parametres, alors U et V sont indépendantes. Cette propriété, partiellement démontrée par Matsumoto et

Yor (2001) et complètement établie par Letac et Wesołowski (2000), est évoquée dans la littérature récente sous le terme *propriété de Matsumoto-Yor*. Il est prouvé dans Letac et Wesołowski (2000)que cette propriété caractérise le produit tensoriel des lois GIG et gamma (moyennant la condition sur les paramètres).

D'autres propriétés d'indépendance du type Matsumoto-Yor ont été prouvées par Koudou et Vallois (2010), en remarquant que les fonctions f possibles sont essentiellement au nombre de quatre et en exhibant les lois correspondantes sous les hypothèses d'existence et de régularité des densités (voir aussi Koudou et Vallois, 2011, où les hypothèses de régularité ont été légèrement assouplies). Pour $f(x) = \log(1+x) - \log x$, la propriété d'indépendance correspondante peut se réécrire de la manière suivante : si X, Y sont des varianles aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Kummer

$$K^{(2)}(a,b,c)(dx) := Cx^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx, \ a,c>0, \ b \in \mathbb{R}$$

(C étant la constante de normalisation) et Y suit la loi gamma $\gamma(b,c)(dx) = \dfrac{c^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$, alors les variables aléatoires

$$U := \frac{1+\frac{1}{X+Y}}{1+\frac{1}{X}}, \quad V := X+Y \tag{1.1}$$

sont indépendantes. De plus, $U \sim \mathrm{Beta}(a,b)$ et $V \sim K^{(2)}(a+b,-b,c)$ où $\mathrm{Beta}(a,b)(dx) = \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{0<x<1\}}dx.$

La loi de Kummer et la loi gamma peuvent tre définies sur l'ensembles des matrices symétriques définies positives (dans la cas gamma, c'est la loi de Wishart). Par ailleurs, des versions matricielles existent pour la propriété de Matsumoto-Yor concernant les lois GIG et gamma (Letac et Wesołowski, 2000 et Massam et Wesołowski, 2006). Il est alors naturel de se demander si l'indépendance des variables aléatoires U et V définies par (1.1) est encore vérifiée si X et Y sont des matrices aléatoires $r \times r$ définies positives (bien-sr, U et V doivent tre réécrites en tant que matrices, cf (2.4)). Nous répondons à cette question par l'affirmative. Mme si la preuve repose uniquement sur un calcul de jacobien, le contexte matriciel la rend non triviale.

Nous énonons le résultat dans la section 2 après un rappel des définitions des lois de Kummer, de Wishart et beta pour des variables matricielles. La preuve est donnée dans la section 3, suivie d'une courte discussion en section 4.

2 Le résultat

Soit $\mathcal{M}_r$ l'espace Euclidien des matrices réelles symétriques et soit I l'élément unité de $\mathcal{M}_r$. Considérons le produit scalaire $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(AB)$ sur $\mathcal{M}_r$. Désignons par $\mathcal{M}_r^+$ le cône des matrices définies positives de $\mathcal{M}_r$.

Pour $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$ et $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{r-1}{2}\} \cup (\frac{r-1}{2}, \infty)$, la loi de Wishart $\gamma(b,\Sigma)$ (voir par exemple Letac et Wesołowski, 2000 et Massam and Wesołowski, 2006) est definie comme étant celle d'une matrice aléatoire Y prenant ses valeurs dans la fermeture de $\mathcal{M}_r^+$ et dont la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}(e^{\langle\sigma,Y\rangle}) = \left(\frac{\det\Sigma}{\det(\Sigma-\sigma)}\right)^b, \quad \Sigma-\sigma\in\mathcal{M}_r^+.$$

Si $b > \frac{r-1}{2}$, la loi de Wishart $\gamma(b,\Sigma)$ a pour densité:

$$\gamma(b,\Sigma)(dy) = \frac{(\det\Sigma)^b}{\Gamma_r(b)}(\det y)^{b-(r+1)/2}\exp(-\langle\Sigma,y\rangle)\mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(y)\,dy, \tag{2.1}$$

où Γ_r est la fonction gamma multivariée, définie pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathrm{Re}(z) > (r-1)/2$, par

$$\Gamma_r(z) = \pi^{r(r-1)/4}\prod_{j=1}^r \Gamma\left(z-\frac{j-1}{2}\right).$$

Pour $\alpha,\beta > \frac{r-1}{2}$, la loi beta $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ (aussi appelée loi beta matricielle de type I, cf Nagar and Gupta, 2002) sur $\mathcal{M}_r^+$ est

$$\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)(du) = \frac{\Gamma_r(\alpha+\beta)}{\Gamma_r(\alpha)\Gamma_r(\beta)}(\det u)^{\alpha-\frac{r+1}{2}}(\det(I-u))^{\beta-\frac{r+1}{2}}\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(u)\,du, \tag{2.2}$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des matrices u de $\mathcal{M}_r^+$ telles que $I-u\in\mathcal{M}_r^+$.

Pour $a > \frac{r-1}{2}$, $b\in\mathbb{R}$, $\Sigma\in\mathcal{M}_r^+$, la loi de Kummer matricielle sur $\mathcal{M}_r^+$ est définie par

$$K(a,b,\Sigma)(dx) = \frac{1}{\Gamma_r(a)\psi(a,a-b+\frac{r+1}{2};\Sigma)}(\det x)^{a-\frac{r+1}{2}}(\det(I+x))^b\exp(-\langle\Sigma,x\rangle)\mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(x)\,dx, \tag{2.3}$$

où ψ est la fonction hypergeométrique confluente de deuxième espèce à argument matriciel (cf Joshi and Joshi, 1985, formule (2)). Cette distribution est appelée dans la littérature (cf Gupta *et al*, 2001) la loi *Kummer-Gamma* ou la *loi de Kummer de type II*. Par souci de concision, nous l'appellerons simplement *loi de Kummer*.

Nous énonons à présent le résultat.

Theorem 2.1 *Soient a,b,Σ tels que $a > \frac{r-1}{2}$, $b-a > \frac{r-1}{2}$ et $\Sigma\in\mathcal{M}_r^+$. Soient X et Y des matrices aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_r^+$, telles que X suit la loi de Kummer $K(a,b,\Sigma)$ et Y la loi de Wishart $\gamma(b-a,\Sigma)$.*
Alors les matrices aléatoires

$$U := [I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}[I+X^{-1}]^{-1}[I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}, \quad V := X+Y \tag{2.4}$$

sont indépendantes. De plus, $U\sim\mathrm{Beta}(a,b-a)$ et $V\sim K(b,a,\Sigma)$.

3 Proof

Pour $x, y \in \mathcal{M}_r^+$, définissons

$$u := [I + (x+y)^{-1}]^{1/2}[I + x^{-1}]^{-1}[I + (x+y)^{-1}]^{1/2}, \quad v := x + y. \tag{3.1}$$

Notons que, puisque x et y sont des matrices définies positives, alors u, v et $I - u$ le sont aussi. Il en résulte que la transformation

$$T : (x, y) \mapsto (u, v)$$

est bien définie de $\mathcal{M}_r^+ \times \mathcal{M}_r^+$ vers $\mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$. Elle est clairement bijective. Calculons le jacobien de T^{-1}.

3.1 Le jacobien

Il est commode d'écrire $T = T_2 \circ T_1$, où $T_1 : \mathcal{M}_r^+ \times \mathcal{M}_r^+ \to \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$ and $T_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+ \to \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$ sont définis par

$$T_1(x, y) = (w, z) := \big([I + x^{-1}]^{-1},\, x + y\big)$$

et

$$T_2(w, z) = (u, v) := \big([I + z^{-1}]^{1/2} w [I + z^{-1}]^{1/2},\, z\big).$$

On a

$$(x, y) = T_1^{-1}(w, z) = \big([w^{-1} - I]^{-1},\, z - [w^{-1} - I]^{-1}\big) \tag{3.2}$$

et

$$(w, z) = T_2^{-1}(u, v) = \big([I + v^{-1}]^{-1/2} u [I + v^{-1}]^{-1/2},\, v\big). \tag{3.3}$$

Lemma 3.1 *Le jacobian de la transformation T^{-1} est*

$$J(u, v) = \det(I + v)^{\frac{r+1}{2}} \det(I + v - uv)^{-r-1} \det v^{\frac{r+1}{2}}. \tag{3.4}$$

Démonstration: Nous calculons le jacobien de T^{-1} via ceux de $J_{(u,v)\to(w,z)}$ et $J_{(w,z)\to(x,y)}$.

$J_{(u,v)\to(w,z)}$ est le déterminant de la différentielle de T_2^{-1} en (u, v). Cette différentielle est un endomorphisme de $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_r$ qui, en utilisant (3.3), peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & Id_{\mathcal{M}_r} \end{pmatrix}$$

où E n'a pas besoin d'tre calculé et D est la différentielle de la fonction $u \mapsto [I + v^{-1}]^{-1/2} u [I + v^{-1}]^{-1/2}$ à v fixé. Par suite, $J_{(u,v)\to(w,z)}$ est égal à $\det D$ (nous notons de la mme faon le déterminant d'une matrice et celui d'un opérateur linéaire). En utilisant le Théorème 2.1.7 de Muirhead (1982), nous avons

$$\det D = \big(\det[I + v^{-1}]^{-1/2}\big)^{r+1} = \big(\det[I + v^{-1}]\big)^{-\frac{r+1}{2}},$$

i.e.

$$J_{(u,v)\to(w,z)} = \left(\det[I+v^{-1}]\right)^{-\frac{r+1}{2}}. \tag{3.5}$$

Calculons le jacobien de $J_{(w,z)\to(x,y)}$. Par (3.2), on a $x = \left([w^{-1}-I]^{-1}\right.$, donc la différentielle $G(w)$ de x par rapport à w est l'endomorphisme

$$h \mapsto \left([w^{-1}-I]^{-1}w^{-1}hw^{-1}[w^{-1}-I]^{-1}\right.$$

de $\mathcal{M}_r$. Son déterminant est, en utilisant encore Muirhead (1982),

$$\det(G(w) = \det\left([w^{-1}-I]^{-1}w^{-1}\right)^{r+1} = \det(I-w)^{-(r+1)}.$$

Par conséquent, (3.2) donne

$$J_{(w,z)\to(x,y)} = \det\begin{pmatrix} G(w) & 0 \\ H & Id_{\mathcal{M}_r}\end{pmatrix} = \det(G(w) = \det(I-w)^{-(r+1)}, \tag{3.6}$$

où l'expression explicite de H n'est pas utile. De (3.5) et (3.6) on déduit que

$$J(u,v) = J_{(u,v)\to(w,z)}J_{(w,z)\to(x,y)} = \left(\det[I+v^{-1}]\right)^{-\frac{r+1}{2}}\det(I-w)^{-(r+1)}. \tag{3.7}$$

On a

$$\det[I+v^{-1}] = \det\left(v^{-1}\right)\det(I+v). \tag{3.8}$$

Puisque $\det(I+AB) = \det(I+BA)$ pour toutes matrices symétriques A et B, on écrit

$$\begin{aligned}\det(I-w) &= \det\left(I-[I+v^{-1}]^{-1/2}u[I+v^{-1}]^{-1/2}\right)\\ &= \det\left(I-u[I+v^{-1}]^{-1}\right)\\ &= \det\left(I-uv[I+v]^{-1}\right)\\ &= \det(I+v)^{-1}\det(I+v-uv).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituant (3.8) et (3.9) dans (3.7), on obtient (3.4). $\square$

3.2 Calcul de la densité de (U, V)

Notons f_X et f_Y les densités de X et Y respectivement, et $f_{(U,V)}$ celle de (U,V). X et Y étant indépendantes, on a

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_X(x)f_Y(y)J(u,v)\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(u)\mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(v) \tag{3.10}$$

où $(x,y) = T^{-1}(u,v)$ et $J(u,v)$ est le jacobien donné par (3.4). Rappelons que $X \sim K(a,b,\Sigma)$ and $Y \sim \gamma(b-a,\Sigma)$. Par (2.2) et (2.3), désignant par C le produit de toutes les constantes, (3.10) peut s'écrire, pour tous $(u,v)\in\mathcal{U}\times\mathcal{M}_r^+$,

$$\begin{aligned}f_{(U,V)}(u,v) &= C\,(\det x)^{a-\frac{r+1}{2}}(\det(I+x))^{-b}\exp(-\langle\Sigma,x\rangle)\\ &\quad\times(\det y)^{b-a-\frac{r+1}{2}}\exp(-\langle\Sigma,y\rangle)\,J(u,v)\\ &= C\,(\det x)^{a-\frac{r+1}{2}}(\det(I+x))^{-b}(\det y)^{b-a-\frac{r+1}{2}}\\ &\quad\times\exp(-\langle\Sigma,x+y\rangle)\,J(u,v).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Le lemme suivant exprime $\det x$, $\det y$, $\det(I+x)$ en fonction de u et v.

Lemma 3.2 *Considérons x, y, u, v tels que $T(x, y) = (u, v)$ comme dans (3.1). Alors,*

$$\det x = \det\left((I + v - uv)^{-1}\right) \det u \det v, \tag{3.12}$$

$$\det(I + x) = \det\left((I + v - uv)^{-1}\right) \det(I + v), \tag{3.13}$$

$$\det y = \det v \det\left((I + v - uv)^{-1}\right) \det(I + v) \det(I - u). \tag{3.14}$$

Démonstration : Par (3.1) on a

$$\begin{aligned} x^{-1} &= \left(I + v^{-1}\right)^{1/2} u^{-1} \left(I + v^{-1}\right)^{1/2} - I \\ &= \left(I + v^{-1}\right)^{1/2} \left(u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1}\right) \left(I + v^{-1}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$x = \left(I + v^{-1}\right)^{-1/2} \left(u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1}\right)^{-1} \left(I + v^{-1}\right)^{-1/2}. \tag{3.15}$$

Comme $I + v^{-1} = v^{-1}(I + v)$, on a $u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1} = u^{-1}(I + v - uv)(I + v)^{-1}$, donc (3.15) donne

$$\begin{aligned} x &= v^{1/2}(I + v)^{-1/2}(I + v)(I + v - uv)^{-1}uv^{1/2}(I + v)^{-1/2} \\ &= v^{1/2}(I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}uv^{1/2}(I + v)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Prenant le déterminant, on obtient (3.12).

Les définitions de u et v impliquent

$$\begin{aligned} \det u &= \det(I + v^{-1}) \det(I + x^{-1})^{-1} \\ &= (\det v)^{-1} \det(I + v) \det x \det(I + x)^{-1} \end{aligned}$$

qui permet d'obtenir $\det(I + x) = (\det u)^{-1}(\det v)^{-1} \det(I + v) \det x$. (3.13) s'ensuit en utilisant (3.12).

Pour obtenir (3.14), on utilise (3.16) pour écrire

$$\begin{aligned} y &= v - x \\ &= v^{1/2}Iv^{1/2} - v^{1/2}(I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}u(I + v)^{-1/2}v^{1/2} \\ &= v^{1/2}\left[I - (I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}u(I + v)^{-1/2}\right]v^{1/2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \det y &= \det v \det\left(I - (I + v - uv)^{-1}u\right) \\ &= \det v \det\left((I + v - uv)^{-1}(I + v - uv - u)\right) \end{aligned}$$

et (3.14) s'ensuit puisque $I + v - uv - u = (I - u)(I + v)$.

□

Pour terminer la preuve du théorème, on substitue (3.12), (3.13), (3.14) et (3.4) dans (3.11), on remplace $x + y$ par v et on obtient

$$f_{(U,V)}(u, v) = C\left(\det u\right)^{a - \frac{r+1}{2}} \left(\det(I - u)\right)^{b - a - \frac{r+1}{2}} \left(\det v\right)^{b - \frac{r+1}{2}} \left(\det(I + v)\right)^{-a},$$

ce qui montre que les matrices aléatoires U et V sont indépendantes et qu'elles suivent respectivement les lois Beta$(a, b - a)$ et $K(b, a, \Sigma)$ (cf (2.2) et (2.3)). □

References

[1] Gupta, A. K., Cardeno, L. and Nagar, D. K.(2001). Matrix-variate Kummer-Dirichlet distributions. *J. Applied. Math.*, 117-139.

[2] Joshi, R. M. and Joshi, J. M. C. (1985). Confluent hypergeometric function of second kind with matrix argument. *Indian J. pure appl. Math.* **16** (6), 627-636.

[3] Koudou, E. and Vallois, P. (2010). Independence properties of the Matsumoto-Yor type. To appear in *Bernoulli*.

[4] Koudou, E. and Vallois, P. (2011). Which distributions have the Matsumoto-Yor property? To appear in *Electronic Communications in Probability*.

[5] Letac, G. and Wesołowski, J. (2000). An independence property for the product of GIG and gamma laws. *Ann. Prob.* **28**, 1371-1383.

[6] Massam, H. and Wesołowski, J. (2006). The Matsumoto-Yor property and the structure of the Wishart distribution. *Journal of Multivariate Analysis* **97**, 103-123.

[7] Matsumoto, H. and Yor, M. (2001). An analogue of Pitman's $2M-X$ theorem for exponential Wiener functional, Part II: the role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.* **162**, 65-86.

[8] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, New York.

[9] Nagar and Gupta (2002). Matrix-variate Kummer-beta distributions. *J. Austral. Math. Soc.* **73**, 11-25.